

Reinhold, Frank; Hoch, Stefan; Werner, Bernhard; Reiss, Kristina; Richter-Gebert, Jürgen
**Tablet-PCs im Mathematikunterricht der Klasse 6. Ergebnisse des
Forschungsprojektes ALICE:Bruchrechnen**

Münster : Waxmann 2018, 28 S.



Quellenangabe/ Reference:

Reinhold, Frank; Hoch, Stefan; Werner, Bernhard; Reiss, Kristina; Richter-Gebert, Jürgen: Tablet-PCs im Mathematikunterricht der Klasse 6. Ergebnisse des Forschungsprojektes ALICE:Bruchrechnen. Münster : Waxmann 2018, 28 S. - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-165794 - DOI: 10.25656/01:16579

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-165794>

<https://doi.org/10.25656/01:16579>

in Kooperation mit / in cooperation with:



WAXMANN
www.waxmann.com

<http://www.waxmann.com>

Nutzungsbedingungen

Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document.

This document is solely intended for your personal, non-commercial use. Use of this document does not include any transfer of property rights and it is conditional to the following limitations: All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

Kontakt / Contact:

peDOCS
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
Informationszentrum (IZ) Bildung
E-Mail: pedocs@dipf.de
Internet: www.pedocs.de

Mitglied der


Leibniz-Gemeinschaft

Gefördert von der Heinz Nixdorf Stiftung

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Print-ISBN 978-3-8309-3857-6

E-Book-ISBN 978-3-8309-8857-1

© Waxmann Verlag GmbH, 2018

www.waxmann.com

info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Anne Breitenbach, Münster

Satz: Inna Ponomareva, Düsseldorf / Anne Breitenbach, Münster

Druck: Lindhauer Druck und Medien, Paderborn

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier,
säurefrei gemäß ISO 9706

Printed in Germany

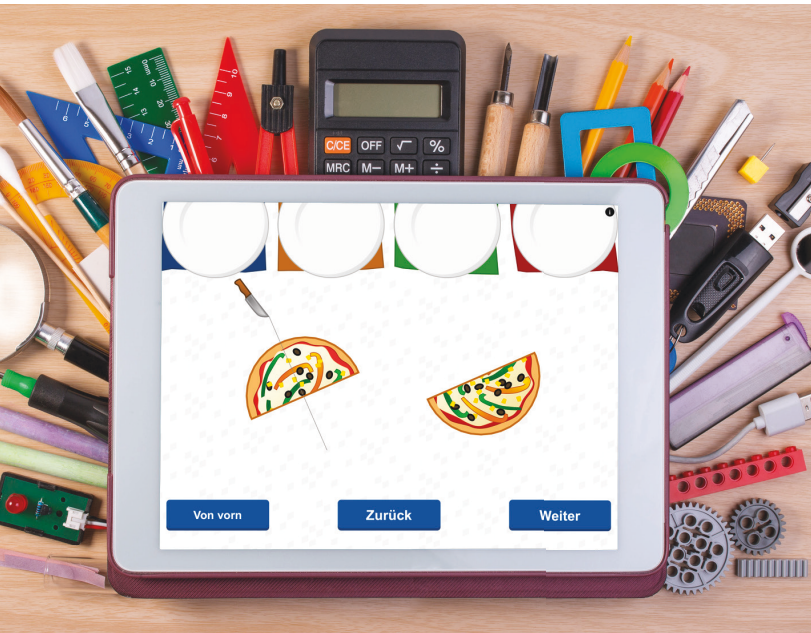
Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.
Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des
Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung
elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.



Inhalt

1 Einleitung.....	4
2 Hintergrund des Forschungsprojektes.....	5
2.1 Entwicklung des Bruchzahlbegriffs.....	5
2.2 Entwicklung von Lernumgebungen	7
3 Ergebnisse des Forschungsprojektes	14
3.1 Erfahrungen der Lehrkräfte der iPad-Gruppe.....	14
3.2 Unterschiede an Gymnasien und Mittelschulen	15
3.3 Einfluss digitaler Medien auf die Leistung der Lernenden.....	17
3.4 Arbeiten mit Tablet-PCs während des Mathematikunterrichts.....	21
4 Diskussion und Ausblick.....	23
5 Fazit.....	25
6 Literatur	26
7 Danksagung	28

1 Einleitung



Die Bruchrechnung gilt als schwieriger Teilbereich der mathematischen Grundbildung. Heinrich Winter nennt sie gar ein „leidiges Kapitel der Schulmathematik für alle Betroffenen“ (Winter, 1999, S. 6) – für Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler sowie ihre Eltern. Insbesondere die Entwicklung eines Bruchzahlbegriffs zu Beginn der Sekundarstufe kann für Schülerinnen und Schüler mit erheblichen Problemen verbunden sein. Viele dieser spezifischen Probleme sind sowohl Lehrkräften in der Schule als auch in der Bildungsforschung gut bekannt und es besteht weitgehend Konsens darüber, dass der angeleitete

Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen von Brüchen – z.B. der symbolischen Darstellung von $\frac{1}{3}$ und einer ikonischen Darstellung in Form von einem Drittel einer runden Pizza oder einer rechteckigen Schokolade – gerade im Anfangsunterricht der Bruchrechnung gewinnbringend sein kann, um Kindern ein konzeptuelles Verständnis von Bruchzahlen zu vermitteln (z. B. Padberg & Wartha, 2017). Hier können unter anderem digitale Unterrichtsmedien neue methodische Möglichkeiten eröffnen, Darstellungswechsel in den Sechstklassunterricht zu integrieren. Vor dem Hintergrund lernpsychologischer Theorien erscheint der Einsatz interaktiver Lernumgebungen vielversprechend (Reiss, Hoch, Reinhold, Richter-Gebert & Werner, 2017). Auch Ergebnisse empirischer Studien lassen vermuten, dass Kinder vom Lernen mit multimedialen Inhalten gerade im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht profitieren können (Hillmayr, Reinhold, Zierwald & Reiss, 2017). Jedoch finden digitale Medien wie Tablet-PCs in Deutschland im internationalen Vergleich noch eher selten Einzug in die Klassenzimmer (Sälzer & Reiss, 2016). Insbesondere fehlt es derzeit an empirischen Ergebnissen zum Einsatz von Tablet-PCs wie dem iPad im Regelunterricht. Im Forschungsprojekt *ALICE:Bruchrechnen* wurde eine solche empirische Studie im Kontext des Anfangsunterrichts der Bruchrechnung an Gymnasien und Mittelschulen in Bayern durchgeführt.

2 Hintergrund des Forschungsprojektes

Was macht die Bruchrechnung im Allgemeinen und die Entwicklung eines tragfähigen Bruchzahlbegriffs im Speziellen zu einem so schwierigem Unterfangen für Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Sekundarstufe? Welche Indizien sprechen dafür, diesen Lernprozess durch den Einsatz digitaler

Medien unterstützen zu können? Im nachfolgenden Abschnitt werden die mathematikdidaktischen und lernpsychologischen Theorien, auf die sich *ALICE:Bruchrechnen* beruft, knapp dargestellt und an konkreten Beispielen erläutert.

2.1 Entwicklung des Bruchzahlbegriffs

Bei der Zahlbereichserweiterung von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen verändert sich das konzeptuelle Verständnis dessen, was man unter *Zahlen* versteht. Diese Unterschiede, die stets mit einer notwendigen Veränderung des Verständnisses von Zahlen einhergehen, lassen sich grob in vier Teilbereiche einordnen (z. B. Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2015):

1. Während natürliche Zahlen eine eindeutige symbolische *Darstellung* haben, können wertgleiche Brüche durch verschiedene Symbole repräsentiert sein (z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$). Sogar natürliche Zahlen verlieren im Zahlbereich der rationalen Zahlen ihre eindeutige Darstellung (z. B. $2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$).
2. Das von den natürlichen Zahlen wohlbekannte Konzept des Nachfolgers existiert im Kontext von Bruchzahlen nicht mehr, denn die rationalen

Zahlen bilden eine dichte Teilmenge der reellen Zahlen. Jedoch kann an dieser Stelle in Klasse 6 kein fachlich einwandfreies Konzept von *Dichte* vermittelt werden.

3. Die Frage nach der größeren von zwei vorgegebenen natürlichen Zahlen ist weitgehend einfach unter Rückgriff auf die Ziffernschreibweise zu beantworten. Das Konzept der Größe von Bruchzahlen unterscheidet sich hiervon grundlegend. So ist etwa $\frac{8}{9} < \frac{7}{6}$, obwohl $8 > 7$ und $9 > 6$. Dieser Schritt bereitet Schülerinnen und Schüler zum Teil erhebliche Schwierigkeiten, wenn sie an Konzepten natürlicher Zahlen festhalten. So sind Schülerantworten wie die in Abbildung 1 keine Seltenheit, in der $\frac{8}{9}$ fälschlicherweise als der größere Bruch interpretiert wird, „weil der Zähler größer ist“.

Aufgabe 17 Tom möchte wissen, welcher der beiden Brüche $\frac{8}{9}$ und $\frac{7}{6}$ größer ist.

a) Welcher Bruch ist größer? Kreuze an.

<input checked="" type="checkbox"/> $\frac{8}{9}$ ist größer.	<input type="checkbox"/> $\frac{7}{6}$ ist größer.	<input type="checkbox"/> Beide Brüche sind gleich groß.
---	--	---

b) Schreibe eine Erklärung auf.

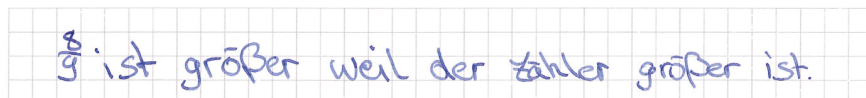


Abbildung 1. Exemplarischer Schülerfehler beim Größenvergleich von Brüchen, der für einen ausgeprägten Natural Number Bias (vgl. S. 6) spricht.

4. Auch die Interpretation grundlegender *Rechenoperationen* verändert sich bei der Zahlbereichserweiterung. Gängige Grundvorstellungen, etwa der Multiplikation als „wiederholtes Addieren“, verlieren oder verändern ihre Bedeutung. Auch, dass „Multiplizieren vergrößert“ verliert seine allgemeine Gültigkeit. So kann z. B. die Rechnung $\frac{1}{2} \cdot 4$ weder als wiederholte Addition von 4 erklärt werden, noch ist das Ergebnis 2 größer als der zweite Faktor 4.

Man geht davon aus, dass Schülerinnen und Schüler erhebliche Probleme bei der Entwicklung einer tragfähigen Vorstellung von Bruchzahlen haben, wenn sie an Konzepten natürlicher Zahlen festhalten. In der Fachdidaktik und der Psychologie ist diese Schwierigkeit als *Natural Number Bias* bekannt.

Natural Number Bias

Der *Natural Number Bias* beschreibt eine gegenüber Veränderungen weitgehend resistente Tendenz von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit rationalen Zahlen – insbesondere Brüchen – auf Konzepte natürlicher Zahlen (z. B. das Zählprinzip) zurückzugreifen. Er umfasst insgesamt vier Dimensionen, in denen sich natürliche Zahlen grundlegend von Bruchzahlen unterscheiden: Darstellungen, Dichte, Größe und Operationen (Obersteiner et al., 2015).

Vielfältige Schwierigkeiten beim Erwerb tragfähiger Konzepte von Bruchzahlen sind Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung. Ein Ziel ist dabei häufig konkrete Lerngegenstände zu identifizieren, die die Entwicklung eines Bruchzahlbegriffs bei Schülerinnen und Schülern geeignet unterstützen können. Dabei hat sich gezeigt, dass eine Fokussierung im Unterricht auf arithmetische Operationen sowie den Umgang mit der formal-symbolischen Schreibweise von Brüchen alleine meist nicht gewinnbringend ist. Vielmehr wird angenommen, dass gerade im Anfangsunterricht der Bruchrechnung die Verwendung bildhafter Darstellungen sowie der durch die Lehrkraft angeleitete und beständige Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen von Brüchen sehr praktikable fachdidaktische Herangehensweisen darstellen (z. B. Padberg & Wartha, 2017).

Als Beispiele solcher Repräsentationen werden etwa runde Pizzen und rechteckige Schokoladen verwendet, um Alltagsbezüge in den Mathematikunterricht zu integrieren und eine Vorstellung von Bruchzahlen als *Teil vom Ganzen* zu etablieren (z. B. Winter, 1999). Diese konkreten Beispiele können dann zu kontextfreien mathematischen Modellen – hier etwa das Kreis- bzw. das Rechteckdiagramm – weiterentwickelt werden, auf die in vielen Teilbereichen des Bruchrechnenunterrichts zurückgegriffen werden kann. So kann darauf aufbauend etwa das Erweitern des Bruches $\frac{1}{2}$ mit 2 als *Verfeinern der Einteilung* eingeführt und veranschaulicht werden – zunächst als Zerschneiden einer halben Pizza in zwei gleich große Stücke und im Anschluss als Einzeichnen einer geeigneten Linie im Kreisdiagramm. Im Anschluss kann unter Rückgriff auf diese bildhaften Darstellungen ein formal-symbolischer Zugang zum Erweitern als arithmetische Operation zur Erzeugung wertgleicher Brüche motiviert und illustriert werden: Das Zerschneiden der Pizza führt zum einen dazu, dass die Pizzastücke halb so groß werden und zum anderen dazu, dass nun doppelt so viele Stücke vorhanden sind – kurz $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (z. B. Prediger, 2006).



Grundvorstellungen von Bruchzahlen

In der Mathematikdidaktik versteht man unter Grundvorstellungen mentale Modelle – also interne Wissensrepräsentationen – die abstrakte mathematische Inhalte veranschaulichen. Im Kontext von Bruchzahlen wird angenommen, dass solche Grundvorstellungen insbesondere dafür notwendig sind, zwischen unterschiedlichen Repräsentationen von Brüchen, oder zwischen verschiedenen ikonischen Darstellungen von Brüchen zu übersetzen. Gängige Grundvorstellungen sind hier etwa die Interpretation von Bruchzahlen als Teil vom Ganzen oder als Maß auf dem Zahlenstrahl sowie des Erweiterns und Kürzens als Verfeinern und Vergröbern einer Einteilung (z. B. Padberg & Wartha, 2017).



2.2 Entwicklung von Lernumgebungen

Bei der Entwicklung von Lernumgebungen ist es sinnvoll neben fachdidaktischen und inhaltspezifischen Gesichtspunkten auch Erkenntnisse aus dem Bereich der Lernpsychologie einzubeziehen. Hier wird meist davon ausgegangen, dass die Anzahl der Informationen, die Menschen gleichzeitig verarbeiten können, begrenzt ist und dass das Vorwissen von Lernenden einen Einfluss darauf haben kann, wie aufwändig sich das Lernen für sie gestaltet (Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011). Die Entwicklung eines Verständnisses für Bruchzahlen kann in diesem Sinne als anspruchsvoller Lerngegenstand gesehen werden: Wie bereits beschrieben müssen verschiedene Schreibweisen und Darstellungen sowie Gesetzmäßigkeiten plausibel gemacht und verinnerlicht werden. Darüber hinaus verfügen Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Bruchrechnenunterrichts üblicherweise über nahezu kein substantielles Vorwissen zu rationalen Zahlen, auf das der Unterricht aufbauen kann – im Gegenteil kann sich das Festhalten an einem durch natürliche Zahlen motivierten Zahlbegriff sogar als Lernhindernis herausstellen. Weist das verwendete Unterrichtsmaterial zusätzlich Elemente

auf, die die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf nicht relevante Aspekte konzentrieren, kann sich dies ebenfalls nachteilig auf den Lernerfolg auswirken.

Cognitive Load-Theorie

Die Grundannahme der *Cognitive Load*-Theorie (Sweller et al., 2011) ist eine beschränkte Verarbeitungskapazität des menschlichen Arbeitsgedächtnisses. Man geht davon aus, dass sich die kognitive Belastung beim Erlernen einer Fähigkeit wie folgt zusammensetzt: Aus einer intrinsischen Belastung, die von der Schwierigkeit des Lerngegenstandes und dem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler abhängt, und einer irrelevanten Belastung, die von der Qualität der Lernumgebung abhängt. Weiter wird angenommen, dass Lernprozesse nur gelingen können, wenn diese Gesamtbelastung die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses nicht überschreitet. Gerade im Bereich der digitalen Unterrichtsmethoden wird diskutiert, inwiefern sich die lernbezogenen kognitiven Ressourcen der Schülerinnen und Schüler durch lernförderliche Ansätze aktivieren und fokussieren lassen.

Vielversprechend erscheint die Verwendung multimedialer Lerninhalte, also solcher, in denen den Lernenden verschiedene Zugänge zu einem Lerngegenstand ermöglicht werden – konkret die Präsentation von Informationen auditiv *und* visuell oder auch in Form von Texten *und* Bildern (Mayer, 2014). In diesem Zusammenhang kann der bereits dargestellte Rückgriff auf unterschiedliche Repräsentationen von Bruchzahlen als multimedialer Lernansatz bezeichnet werden, wenn im Mathematikunterricht ganz selbstverständlich verschiedene Darstellungen verwendet werden. Als entscheidend zeigt sich hier die räumlich nahe Platzierung unterschiedlicher Darstellungen, die ein und denselben Lerngegenstand repräsentieren. So sollte etwa die symbolische Bezeichnung eines im Kreisdiagramm dargestellten Bruches nicht losgelöst in einem Text, sondern in der bildhaften Darstellung selbst aufgeführt werden, um den Zusammenhang der beiden Repräsentationen zu verdeutlichen und unterschiedliche Arten der Verarbeitung zu ermöglichen.

Kognitive Theorie des multimedialen Lernens

Die kognitive Theorie des multimedialen Lernens (Mayer, 2014) gründet neben einer beschränkten Kapazität des Arbeitsgedächtnisses auf zwei weiteren Annahmen: Einerseits geht man davon aus, dass Menschen zum einen auditiv und visuell dargebotene Informationen in jeweils unterschiedlichen kognitiven Strukturen und zum anderen in Texten und Bildern dargestellte Informationen wieder in unterschiedlichen kognitiven Strukturen verarbeiten können. Andererseits wird davon ausgegangen, dass Lernen ein aktiver Prozess ist, bei dem Wissen durch gezielte Auseinandersetzung mit einem Lerngegenstand in bestehende Wissensstrukturen eingegliedert werden muss. Dabei versteht Mayer (2014) multimediales Lernen nicht ausschließlich digital. Insbesondere kann auch papierbasiertes Unterrichtsmaterial multimedial (mit Texten und Bildern) aufbereitet sein.

Weiter wird angenommen, dass Texte und Bilder nicht nur unterschiedlich verarbeitet werden, sondern darüber hinaus unterschiedlich gut geeignet sind, um die Ausbildung bestimmter Wissensrepräsentationen im Langzeitgedächtnis zu unterstützen (Schnotz & Bannert, 2003). Bilder und ikonische Darstellungen können so ausgewählt werden, dass sie weitreichende Ähnlichkeit mit dem zu repräsentierenden Lerngegenstand aufweisen, wohingegen Texte, Worte oder Symbole meist keine strukturellen Gemeinsamkeiten mit ihrem Inhalt haben. Es scheint, dass Schülerinnen und Schüler beim Lernen mit Bildern eher alltägliche Erfahrungen und Bezüge zur Realität herstellen können als im Umgang mit Texten (Schnotz & Bannert, 2003). So ist davon auszugehen, dass die symbolische Darstellung des Bruches $\frac{1}{4}$ für Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Bruchrechnenunterrichts keine semantische Information enthält, die einen Bezug zu einem Viertel erlauben würde. Eine bildhafte Darstellung von einem Viertel – etwa als markierter Teil eines Kreisdiagramms – kann jedoch leicht Alltagserfahrungen aktivieren, etwa das Teilen einer Pizza oder eines Kuchens. Gerade dadurch können abstrakte Lerngegenstände mit einem semantischen Inhalt verbunden werden und anschauliche Grundvorstellungen von Bruchzahlen entwickelt werden. Ein weiteres Beispiel stellt die Umwandlung von unechten Brüchen in gemischte Zahlen oder umgekehrt dar. Auch hier ist zu vermuten, dass die Gleichwertigkeit von $2\frac{1}{3}$ und $\frac{7}{3}$ alleine auf der Basis der beiden Symbole nur schwer zu vermitteln ist, da erst ein neu zu erlernender Algorithmus die Übersetzung der beiden Schreibweisen in die jeweils andere erlaubt. Ikonische Darstellungen der beiden gleichwertigen Zahlen, etwa in Kreismodellen, können Schülerinnen und Schülern den Zusammenhang zwischen den Schreibweisen verdeutlichen – denn es erscheint plausibel für beide Zahlen ein und dasselbe Bild zu verwenden, in dem insbesondere die zwei Ganzen sofort erkannt werden können.

Integratives Modell des Text- und Bildverständnisses

Die Grundlage des integrativen Modells des Text- und Bildverständnisses (Schnotz & Bannert, 2003) ist, ähnlich wie bei Mayer (2014), die Annahme einer getrennten Verarbeitung von Informationen im Arbeitsgedächtnis. Jedoch gehen Schnotz und Bannert davon aus, dass Informationen anders unterschieden werden, nämlich auf Grund unterschiedlicher Repräsentationen: Unter deskriptiven Repräsentationen werden gesprochene oder geschriebene Textpassagen oder etwa mathematische Formeln und Symbole verstanden, die keine strukturelle Ähnlichkeit mit dem Inhalt besitzen, auf den sie sich beziehen. Demgegenüber stehen depiktionale Repräsentationen, etwa Bilder, Zeichnungen oder ikonische Darstellungen mathematischer Konstrukte, die strukturelle Ähnlichkeit mit dem Inhalt aufweisen.



Diese lernpsychologisch motivierten Aspekte zur Gestaltung von Lernumgebungen können sowohl papierbasiert als auch mit digitalen Medien geeignet umgesetzt werden.

2.3 Potenzial digitaler Medien

Neben den dargestellten Gründen für die Verwendung multimedialer Lernumgebungen bieten digitale Unterrichtsmedien und hier insbesondere Tablets vielversprechende weitere Möglichkeiten, Lernprozesse gewinnbringend zu unterstützen. So wird angenommen, dass sich zum Kontext passende Gesten lernförderlich auf die Entwicklung von Konzepten auswirken können (Wilson, 2002). Dies spricht dafür, Simulationen konkreter Handlungen in digitalen Lernumgebungen so nah wie möglich an den realen Handlungen zu halten. Hier kann etwa das Schneiden einer Pizza durch eine Fingerbewegung über einen Touchscreen als passende oder *kongruente Geste* bezeichnet werden, bei der nicht nur die Fingerbewegung an die reale Handlung erinnert, sondern auch die Blickbewegung des Nutzers der Hand auf dem Touchscreen folgt. Im Gegensatz dazu hat das Schneiden einer Pizza durch die Bewegung einer Maus auf einem Bildschirm weniger mit der tat-

sächlichen Handlung zu tun und ist demnach eine *inkongruente Geste*. Derartige Argumentationen beschränken sich jedoch nicht auf Simulationen realer Tätigkeiten. Soll etwa ein Anteil von $\frac{5}{7}$ an einem Balken farbig markiert werden, so unterscheiden sich papierbasierte Formate und entsprechend aufbereitete digitale Formate der Aufgabe: In gedruckter Form liegt der Weg über das Messen des Balkens mit anschließender Division seiner Länge durch 7 sowie der Multiplikation mit 5 nahe – eine operative Vorgehensweise, die konkreten Bezug zur Grundvorstellung *Teil vom Ganzen* aufweist. Dahingegen kann die entsprechende Aufgabe in einer digitalen Lernumgebung so aufbereitet sein, dass sich der Balken mittels einer kontinuierlichen Fingerbewegung nach und nach auffüllen lässt – wodurch eher eine Lösung mittels einer intuitiven Vorstellung von $\frac{5}{7}$ *ohne* Rückgriff auf eine Unterteilung des Balkens in 7 gleich große Teile unterstützt werden kann.



Im Fokus steht in diesem Fall nicht die Markierung des exakten Flächeninhaltes, sondern vielmehr eine Abschätzung des Anteils bezogen auf ein konkretes Ganzes – hier den vorgegebenen Balken (vgl. Abbildung 2).

Darüber hinaus können in digitalen Lernumgebungen Aufgaben derart implementiert werden, dass sie sich selbstständig an individuell unterschiedliche Lernprozesse einzelner Schülerinnen und Schüler anpassen (Leutner, 2002). Derartige *adaptive Aufgabenformate* können einen geeigneten Umgang mit Heterogenität innerhalb einer Klasse in

Embodied Cognition-Theorie

Innerhalb der *Embodied Cognition*-Theorie (Wilson, 2002) wird davon ausgegangen, dass Menschen dazu in der Lage sind, kognitive Belastung in Form von passenden Gesten oder Fingerbewegungen abzuladen – z. B. das Zählen mit den eigenen Fingern – und dass darüber hinaus Handlungsschemata rein kognitive Prozesse losgelöst von ihren ursprünglichen sensomotorischen Zwecken unterstützen können – z. B. das konkrete Zerschneiden einer halben Pizza in zwei Viertel die Grundvorstellung des Erweiterns als Verfeinern einer Einteilung.

einer Art ermöglichen, dass Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Leistungsniveaus gleichermaßen gefördert werden. Hier sind in der einfachsten Form etwa Implementierungen denkbar, bei denen richtige Schülerantworten zu einer Erhöhung des Anforderungsniveaus in der nächsten Aufgabe führen und dementsprechend falsche Antworten zu einer Verringerung der Schwierigkeit. Gerade in der Bruchrechnung ist aus empirischen Studien sowie theoretischen Überlegungen bereits viel dazu bekannt, was einzelne Aufgaben desselben Typs schwerer macht. So sind in der Regel Aufgaben zur Bestimmung des Anteils einer diskreten Menge

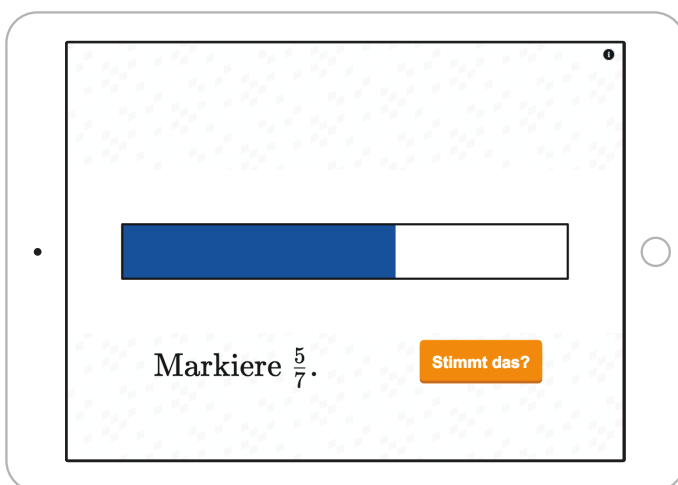


Abbildung 2. Digitale Umsetzung einer kontinuierlichen Visualisierungsaufgabe im iBook. Die blaue Markierung kann mit dem Finger beliebig innerhalb des Balkens verändert werden.

von Objekten dann am einfachsten, wenn die Gesamtzahl der Objekte und der Nenner des Anteils identisch ist. Dieselbe Aufgabe gestaltet sich bereits deutlich schwieriger, wenn die Anzahl einem ganzzahligen Vielfachen des Nenners entspricht (vgl. Abbildung 3). Eine derartige Wahl eines angemessenen und individuell angepassten Schwierigkeitsniveaus stellt eine Möglichkeit dar, einer Demotivation leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler durch immer komplexere Aufgabenstellungen sowie leistungsstärkerer Lernende durch zu einfache Aufgaben vorzubeugen.

Adaptivität

Digitale Lernumgebungen werden als adaptiv (Leutner, 2002) bezeichnet, wenn die Eingaben von Schülerinnen und Schülern während des Arbeitens – z. B. falsche oder richtige Antworten – automatisiert zu Veränderungen der Parameter dieser Lernumgebung – z. B. einer Veränderung des Schwierigkeitsgrades – führt. Adaptive Lernumgebungen können in leistungsheterogenen Lerngruppen eingesetzt werden, um auf die individuell unterschiedlichen Bedürfnisse der einzelnen Schülerinnen und Schüler einzugehen.

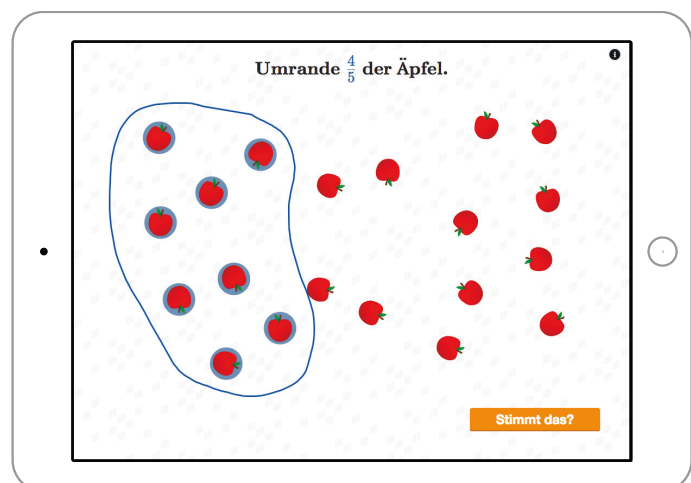
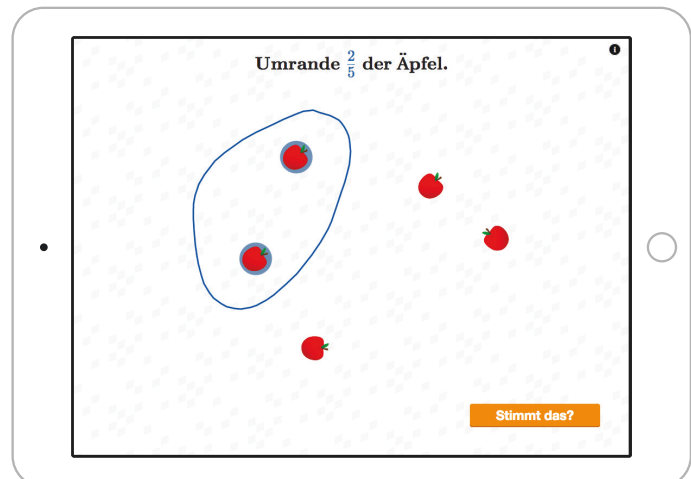


Abbildung 3. Unterschiedliche Schwierigkeitsstufen in einer Aufgabe des iBooks zur Bestimmung von Anteilen diskreter Mengen.

Feedback

Feedback kann von einem Computerprogramm an Schülerinnen und Schüler als direkte Reaktion auf die teilweise Bearbeitung oder vollständige Lösung einer Aufgabe gegeben werden. Man unterscheidet zwischen korrigierendem Feedback mit Bezug zur Lösung der Aufgabe und erklärendem Feedback mit Bezug zum Prozess ihrer Bearbeitung (Hattie & Timperley, 2007).

Neben einer Anpassung des Schwierigkeitsgrades nachfolgender Aufgaben können digitale Lernumgebungen auch derart gestaltet sein, dass Schülerinnen und Schüler umgehend ein auf ihre Antworten bezogenes Feedback automatisch erhalten. Hier wird zwischen unterschiedlichen Arten von Feedback unterschieden. Es kann auf die Lösung einer Aufgabe fokussieren, um auf konkrete Fehlvorstellungen aufmerksam zu machen sowie Rückmeldung über korrekte Antworten zu geben (Hattie & Timperley, 2007). Feedback kann sich aber auch auf den Prozess der Bearbeitung einer Aufgabe beziehen und Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen, vorhandene Vorwissenslücken zu schließen, Fehlvorstellungen zu korrigieren und tiefgehendes Verständnis zu entwickeln (Hattie & Timperley, 2007). Dies soll exemplarisch am Beispiel der Frage illustriert werden, ob $\frac{8}{9}$ oder $\frac{7}{6}$ größer ist. Hier kann zum einen die korrekte Lösung $\frac{7}{6}$ schlicht bestätigt werden, zum anderen das Problem sofort nach der erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe zusätzlich in ikonischer Repräsentation dargestellt werden. Die zweitgenannte Möglichkeit kann einen elaborierten Größenvergleich für das spezielle Paar von Brüchen über $\frac{8}{9} < 1 < \frac{7}{6}$ motivieren und einen alternativen Lösungsansatz neben dem algorithmischen Vorgehen präsentieren – der auch bei falschen Schülerlösungen als Erklärung dienen kann (vgl. Abbildung 4).

Die drei angesprochenen Punkte lassen vermuten, dass entsprechend aufbereitete Lernumgebungen für digitale Medien im Allgemeinen und Tablet-PCs im Speziellen einen positiven Einfluss auf Lernprozesse haben können. Darüber hinaus bietet die Verwendung von Tablet-PCs Möglichkeiten, klassische Unterrichtssituationen aufzubrechen und alternative Instruktionsformen im Klassenzimmer zu realisieren, wie etwa eine der am Forschungsprojekt beteiligten Lehrkräfte berichtet:

„Dass man die Tablets überall hin mitnehmen konnte und nicht immer Zettel, Stift und Buch herumtragen musste, hat meinen Unterricht sehr mobil gemacht.“

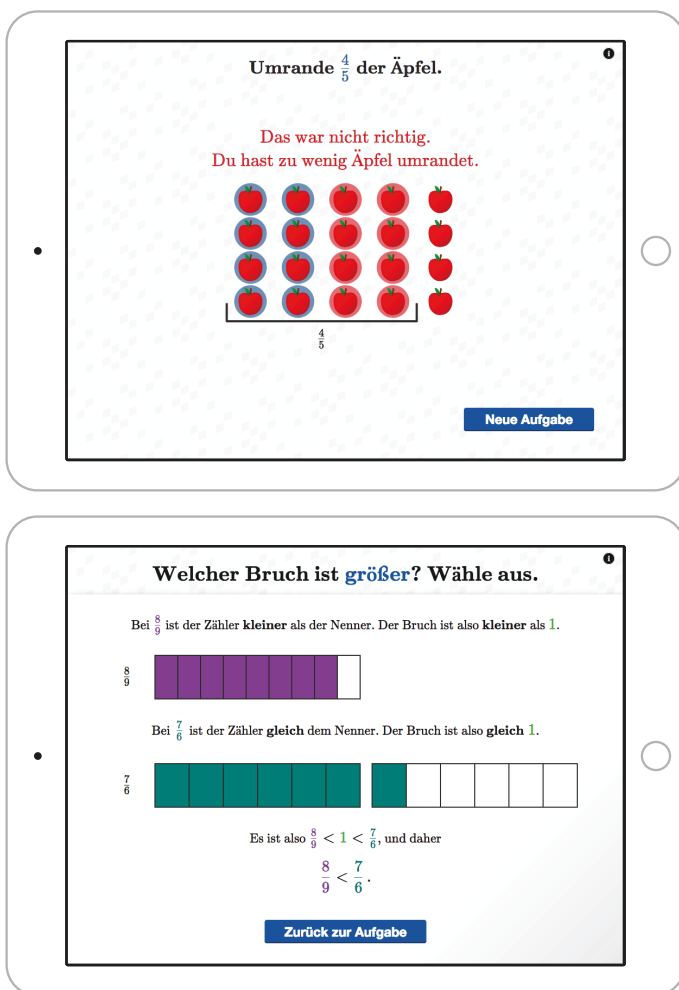


Abbildung 4. Korrigierendes (oben) und erklärendes (unten) Feedback in unterschiedlichen Aufgaben im iBook.

Entwicklung des interaktiven Lehrbuchs für iPads

Im Projekt *ALICE:Bruchrechnen* wurde eine digitale Lernumgebung für den Anfangsunterricht der Bruchrechnung als digitales Schulbuch (iBook) zum Einsatz auf iPads entwickelt, das im Mathematikunterricht der sechsten Jahrgangsstufe eingesetzt und kostenfrei verwendet werden kann (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Geibert, 2018a; Download unter <http://go.tum.de/623496>).

Inhalt des iBooks

Der Inhalt des iBooks orientiert sich an gängigen Curricula der sechsten Jahrgangsstufe und schließt Themen wie Brüche als Teil vom Ganzen, das Erweitern und Kürzen, Brüche auf dem Zahlenstrahl, die gemischte Schreibweise sowie den Größenvergleich von Brüchen ein (siehe auch Reinhold, 2018b). Das iBook fokussiert im Vergleich zu traditionellen Schulbüchern mehr auf die Vermittlung intuitiver und anschaulicher Grundvorstellungen von Bruchzahlen als auf Rechenfähigkeiten, was auch die Lehrkräfte bestätigen:

„Im iBook wird viel mehr mit bildhaften Darstellungen gearbeitet als in einem normalen Unterricht oder Unterrichtswerk.“

Technische Umsetzung der Lernumgebung

Für die technischen Grundfunktionen digitaler Bücher wurde auf die frei verfügbare Gestaltungssoftware *iBooks Author* zurückgegriffen, die insbesondere die Möglichkeit bietet, interaktive Inhalte in Form von HTML5-Umgebungen – sog. *Widgets* – einzubinden. Die technische Umsetzung der insgesamt 90 interaktiven Widgets erfolgte durch das Projektteam (siehe auch Hoch, in Vorb.).

Zu jedem Widget im iBook sind Schwierigkeitsstufen hinterlegt. Nach erfolgreicher Bearbeitung eines Blocks von drei bis fünf Aufgaben entscheidet das Widget automatisch anhand der Lösungsrate des Blocks, aus welcher Schwierigkeitsstufe der nächste Block generiert wird. Alle Widgets geben zudem Feedback auf die Eingaben der Schülerinnen und Schüler. Darüber hinaus bieten Widgets mit mehrschrittigen Aufgaben die Möglichkeit, abgestufte Lösungshilfen aufzurufen. Diese Features der entwickelten Software wurden von den an der Studie beteiligten Lehrkräften sehr geschätzt, wie etwa eine Lehrerin in einer Befragung angab:

„Was mir sehr positiv aufgefallen ist, ist das neutrale Feedback. Ich musste den Schülerinnen und Schüler quasi gar kein Rückmeldung dazu mehr geben, ob sie richtig oder falsch denken, weil das immer automatisch kam.“

Weiter konnten zum Zweck der Studie Prozessdaten im Unterricht vollständig anonymisiert aufgezeichnet werden, während die Schülerinnen und Schüler mit dem iBook gearbeitet haben. Diese erlaubt etwa das Abspielen der Lösung im Nachhinein und lässt nicht nur Beobachtungen darüber zu, wie die Schülerlösung zu Stande gekommen ist, sondern zu einem gewissen Grad auch Rückschlüsse darauf, was sich die Schülerinnen und Schüler

während der Bearbeitung gedacht haben (Freeman, Dale & Farmer, 2011). Die Möglichkeit zur Aufzeichnung von Prozessdaten wurde lediglich zu Evaluationszwecken verwendet und in der publizierten Form des iBooks entfernt.

Handschrifterkennung als zentrales Feature

Die Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern mit dem iBook erfolgt vollständig auf der Basis von Fingerbewegungen auf dem Touchscreen. Seiten werden durch entsprechende Bewegungen weiter- oder zurückgeblättert und in interaktiven Aufgaben zur Manipulation von ikonisch repräsentierten Bruchzahlen wird auf unmittelbare, natürliche Fingerbewegungen zurückgegriffen. In Aufgaben, in denen symbolisch repräsentierte Bruchzahlen als Lösung angegeben werden müssen – z.B. Rechenaufgaben oder die Übersetzung von Anteilen in Kreis- und Rechteckdiagrammen in Bruchzahlen – wird auf eine Handschrifterkennung zurückgegriffen. Die entsprechende Software zur Handschrifterkennung wurde selbst entwickelt und umfasst in der vorliegenden Form die Erkennung der Ziffern von 0 bis 9 (siehe auch Werner, in Vorb.).

Während die meisten Programme zur Handschrifterkennung geometrische Größen berechnen, welche wesentliche Eigenschaften der zu erkennenden Striche und Symbole messen oder beschreiben, folgt die entwickelte Software einem anderen Paradigma: Hier wurde versucht universellere Merkmale der Striche zu finden, aus denen die Zahlzeichen von 0 bis 9 und – der Idee der First Principles (Irwin, 1988) folgend – so wenig wie möglich über sie anzunehmen oder als gegeben vorauszusetzen. Beispielsweise wird ein Z-förmiger Strich im ersten Schritt als Z-förmiger Strich und nicht als die Ziffer 2 erkannt. Dieser Ansatz ermöglicht, die Anwendung sehr leicht auf andere Auswahlen von Symbolen anzupassen.

Ein wesentliches Gestaltungsmerkmal einer Software zur Handschrifterkennung ist die Arbeit mit Offline- oder Online-Daten. Man spricht von Offline-Verfahren, wenn etwa gescannter Text – egal ob ursprünglich handgeschrieben oder gedruckt – erkannt werden soll. Der Text liegt dann als Bilddatei vor. Die für das iBook entwickelte Handschrifterkennung ist hingegen eine Online-Variante: Beim Bewegen des Fingers auf dem Tablet-PC wird in regelmäßigen Abständen die Position erfasst und zusammen mit einem Zeitstempel gespeichert. Insbesondere ergeben sich dabei Punkte in der Ebene, die eine bestimmte Reihenfolge haben. Ein Vorteil davon ist, dass dadurch mehr Daten zur Analyse zur Verfügung stehen. Ein solches Online-Verfahren ermöglicht dadurch wiederum Zeichen zu erkennen, die auf dem Bildschirm zwar fehlerhaft aussehen, aber im Wesentlichen korrekt geschrieben wurden: Es wird weniger die auf dem Bildschirm erzeugte Grafik analysiert, sondern mehr die Geste, die während des Schreibens mit der Hand gemacht wird. Diese Implementierung der Handschrifterkennung erscheint gut mit der Konzeption des iBooks vereinbar und ermöglicht Schülerinnen und Schülern eine intuitive und greifbare Interaktion mit der Lernumgebung – selbst in rein algorithmischen Aufgaben.

3 Ergebnisse des Forschungsprojektes

Was würde man sich im Umgang mit digitalen Medien wünschen? Können Schülerinnen und Schüler vom Einsatz von Tablet-PCs im Mathematikunterricht profitieren? Kann eine interaktive Gestaltung eine inhaltliche Aufbereitung der Bruchrechnung gewinnbringend unterstützen? Halten diese Wünsche der Realität stand? Und zeigen sich die zu er-

wartenden Effekte für tendenziell leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler im gleichen Maß wie für eher leistungsschwächere Lernende? Die Ergebnisse der Analysen werden nachfolgend zusammengefasst dargestellt und von Aussagen der unterrichtenden Lehrkräfte begleitet.

3.1 Erfahrungen der Lehrkräfte der iPad-Gruppe

Die zwölf Lehrkräfte, die während der Studie mit iPads in ihrem Mathematikunterricht gearbeitet hatten, stellten vor allem eine höhere Motivation ihrer Schülerinnen und Schüler für die Bruchrechnung fest, was sie in den Befragungen angaben:

„Die Motivation war sehr hoch. Die Rückmeldung der Schülerinnen und Schüler auf die Arbeit mit den iPads war sehr positiv und sie hatten Freude daran, mit den Geräten im Mathematikunterricht zu arbeiten.“

Diese höhere Motivation der Schülerinnen und Schüler wurde einer Lehrkraft zufolge nicht nur von ihr selbst, sondern auch von den Eltern der beteiligten Kinder bemerkt, die dies auch an sie zurückgemeldet hatten:

„Auch die Eltern haben mir bestätigt, dass die Motivation ihrer Kinder für den Mathematikunterricht durch das Arbeiten mit den iPads höher war.“

Auch unter den Fachkolleginnen und Fachkollegen stellten die Lehrkräfte ein hohes Interesse am Unterrichten mit iPads fest. Vereinzelt wurden sie auch von fachfremden interessierten Lehrerinnen und Lehrern in ihrem Mathematikunterricht be-

sucht und auf den Unterricht mit den Tablet-PCs angesprochen, wie eine Lehrkraft im Interview berichtete:

„Zweimal waren fachfremde Kollegen da, weil sie großes Interesse am Unterrichten mit digitalen Medien hatten. Sie fanden es auffällig, dass die Schülerinnen und Schüler im Unterricht so entspannt sind.“

Die Lehrkräfte selbst stellten für sich zum einen eine Erleichterung in der Unterrichtsvorbereitung und zum anderen eine Veränderung ihres persönlichen Mathematikunterrichts fest, wie zwei befragte Lehrerinnen und Lehrer angaben:

„Es hat einfach Spaß gemacht, den Unterricht vorzubereiten und ich hatte viel weniger Vorbereitungszeit.“

„Ich habe die Schülerinnen und Schüler sehr frei mit den iPads arbeiten lassen. Das war für die Klassengemeinschaft gut. Sie durften bei mir auch auf dem Boden sitzen oder am Fensterbrett stehen, wo auch immer und wie auch immer sie wollten. Dadurch haben sich andere Gruppen gebildet, als das in meinem Unterricht üblicherweise der Fall ist.“

Diese zum Teil veränderten Sozialformen im Mathematikunterricht hatten laut Aussagen der Lehrkräfte einen deutlich positiven Einfluss auf die Unterrichtsatmosphäre im Klassenraum, was eine Lehrerin folgendermaßen beschrieb:

„Bei der Arbeit mit den iPads war es ruhig. Alle Schülerinnen und Schüler haben gearbeitet und manche haben sich gegenseitig geholfen. Es bildeten sich auch Kleingruppen von drei oder vier Schülerinnen und Schülern. Insgesamt herrschte eine sehr schöne Unterrichtsatmosphäre.“



3.2 Unterschiede an Gymnasien und Mittelschulen

Aufbauend auf der Annahme, dass Gymnasiastinnen und Gymnasiasten im Vergleich zu Mittelschülerinnen und Mittelschüler zu Beginn der Jahrgangsstufe 6 tendenziell leistungstärker sind, wurden ihre Leistungen sowohl vor der Studie (hier: Pretest) als auch nach der Studie (hier: Posttest) verglichen. Tatsächlich erzielten Lernende am Gymnasium bereits in der Erhebung zum anschaulichen Vorwissen von Bruchzahlen vor dem Bruchrechnunterricht bessere Ergebnisse, als Lernende an der Mittelschule. So lösten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten den Pretest im Durchschnitt zu 48% korrekt, während Mittelschülerinnen und Mittelschüler nur 21% der Aufgaben richtig beantworteten. Dieser Unterschied zwischen Schülerinnen und Schülern der beiden untersuchten Schularten blieb auch nach der Intervention im Schnitt bestehen. So erzielten Lernende an Gymnasien im Posttest eine mittlere Lösungsrate von 65%, während Lernende an Mittelschulen nur eine Lösungsrate von 22% er-

reichten. Hierbei ist darauf hinzuweisen, dass sich die Fragen im Pretest grundlegend von den Fragen im Posttest unterschieden haben. Die Ergebnisse lassen vermuten, dass die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten ihren anfangs vorhandenen Wissensvorsprung gegenüber den Mittelschülerinnen und Mittelschülern zu Bruchzahlen während der 15-stündigen Intervention trotz weitgehend kontrolliertem Unterrichtsgeschehen weiter ausbauen konnten.

Entwicklung des Bruchzahlbegriffs an Gymnasien und Mittelschulen

Unter Berücksichtigung der bereits signifikant unterschiedlichen Leistungen im Pretest, die für ein höheres Vorwissen der Schülerinnen und Schüler am Gymnasium sprechen, zeigte sich ein starker Effekt der Schulart auf die Leistung im Posttest zugunsten der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten (Reinhold, 2018b).

Forschungsdesign der vorliegenden Studie



In der Interventionsstudie wurden sowohl Effekte durch das fachdidaktisch aufbereitete Material als auch durch die Verwendung digitaler Lernumgebungen auf Tablet-PCs erwartet. Daher wurden die teilnehmenden Klassen einer von drei Gruppen zugeteilt: Schülerinnen und Schüler der *iPad-Gruppe* arbeiteten im Regelunterricht mit dem entwickelten iBook auf iPads. Sie erhielten damit die Möglichkeit sowohl von der Aufbereitung des Materials an sich als auch dem Potenzial digitaler Medien profitieren zu können. Lernende der *Arbeitsbuchgruppe* arbeiteten während des Unterrichts mit einer papierbasierten und als Buch gedruckten Form des entwickelten Materials, das als PDF ebenfalls kostenfrei verfügbar ist (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018b; Download unter <http://go.tum.de/664331>). Dieses Arbeitsbuch ist inhaltlich identisch mit dem iBook. Es wurde nach Gesichtspunkten der Didaktik der Bruchrechnung sowie lernpsychologischen Theorien zur Gestaltung von Lernumgebungen entwickelt, bietet Schülerinnen und Schülern aber nicht die Möglichkeit, Vorteile digitaler Medien zu nutzen. Diese beiden Gruppen werden nachfolgend als Experimentalgruppen bezeichnet. Die *Kontrollgruppe* wurde unter Rückgriff auf traditionelle Lehrbücher und ohne digitale Medien unterrichtet, so dass in dieser Gruppe weder von einem Einfluss durch das entwickelte Material, noch durch die Verwendung von Tablet-PCs ausgegangen wurde.

Stichprobe

Insgesamt nahmen 721 Schülerinnen und Schüler (320 Mädchen) in 33 verschiedenen Klassen an der Studie teil. Davon besuchten 476 Schülerinnen und Schüler (214 Mädchen) ein Gymnasium und 245 Schülerinnen und Schüler (106 Mädchen) eine Mittelschule. Auf der Grundlage des in Bayern zum Zeitpunkt der Studie etablierten dreigliedrigen Schulsystems, bei dem eine Entscheidung über das Vorrücken in eine der drei weiterführenden

Schulen auf der Grundlage der Jahresfortgangsnoten der Jahrgangsstufe 4 in den Fächern Deutsch, Mathematik sowie Heimat- und Sachunterricht erfolgt, wurde davon ausgegangen, dass Mittelschülerinnen und Mittelschüler als tendenziell leistungsschwächer und Gymnasiastinnen und Gymnasiasten als eher leistungsstärker bezeichnet werden können. Somit konnten Einflüsse digitaler Medien auf leistungsstärkere sowie leistungsschwächere Lernende untersucht werden.

Schriftliche Tests

Zur Abbildung der Leistungen der Lernenden wurden zwei unterschiedliche Erhebungsinstrumente entwickelt. Der Pretest umfasste dabei anschauliche Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff. Demgegenüber enthielt der Posttest an den Lernzielen der Intervention orientierte Aufgaben. Insbesondere umfasst der Posttest zum einen Aufgaben, in denen Fähigkeiten im Umgang mit Visualisierungen geprüft werden (Mathematische Darstellungen verwenden; vgl. KMK, 2003). Andere Aufgaben adressierten arithmetische Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen; vgl. KMK, 2003). In weiteren Aufgaben wurden Schülerinnen und Schüler aufgefordert, ihre gewählte Lösungsstrategie einem imaginären Mitschüler in verständlicher Form darzulegen (Mathematisch kommunizieren; vgl. KMK, 2003).

Durchführung der Studie

Die Studie wurde zu Beginn des Schuljahres 2016/2017 an Gymnasien und zu Beginn des Schuljahres 2017/2018 an Mittelschulen durchgeführt. Die Sequenz umfasste dabei an beiden Schularten ca. 15 Unterrichtsstunden, in denen Inhalte gemäß den geltenden Curricula im Fach Mathematik vermittelt werden sollten. Die Tests wurden in schriftlicher Form durchgeführt und die Nutzungsdaten der Schülerinnen und Schüler der iPad-Gruppe wurden während der Interventionszeiträume anonymisiert auf den iPads gespeichert.



3.3 Einfluss digitaler Medien auf die Leistung der Lernenden

Lässt sich die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs mit einer digitalen Lernumgebung besser fördern als mit traditionellen Schulbüchern? Und lassen sich die erwarteten Effekte auf eine *multimediale* Aufbereitung oder auf eine *digitale* Aufbereitung und die Verwendung von Tablet-PCs zurückführen? Die dargestellten fachdidaktischen und psychologischen Theorien lassen vermuten, dass Schülerinnen und Schüler, die im Mathematikunterricht mit dem iBook auf Tablet-PCs gearbeitet haben (hier: *iPad-Gruppe*), nach der Intervention auch die besten Ergebnisse im Posttest erzielen würden. Weiter wurde angenommen, dass Schülerinnen und Schüler, die im Unterricht eine auf Papier gedruckte Version des iBooks als Arbeitsbuch verwendet haben (hier: *Arbeitsbuchgruppe*), von der fachdidaktischen Aufbereitung und Auswahl der Inhalte sowie der psychologisch motivierten Gestaltung der Lernumgebung profitieren konnten. Dementsprechend wurde vermutet, dass Lernende der Arbeitsbuchgruppe zwar von Schülerinnen und Schüler der iPad-Gruppe übertroffen werden würden, sie jedoch bessere Ergebnisse als Lernende einer *Kontrollgruppe* erzielen würden, die mit traditionellen Schulbüchern gearbeitet haben.

Es zeigte sich, dass diese Vermutung am Gymnasium nur teilweise bestätigt werden konnte. So lösten Schülerinnen und Schüler der iPad-Gruppe den Post-

test zu 67% korrekt, jedoch erzielten Lernende der Arbeitsbuchgruppe mit einer Lösungsrate von 68% nahezu identische Ergebnisse. Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe lösten bei einer Lösungsrate von 59% diese Aufgaben signifikant schlechter, als Lernende beider Experimentalgruppen. Diese Unterschiede zeigten sich am Gymnasium jedoch ausschließlich in der Bearbeitung von Aufgaben, in denen Fähigkeiten im Umgang mit Visualisierungen den Prüfungsgegenstand darstellten (vgl. Abbildung 5). Eine Erklärung hierfür könnte sein, dass durch das entwickelte Material abstrakte mathematische Konzepte anschaulicher vermittelt werden können, als mit traditionellen Schulbüchern, was auch die Aussage einer Lehrkraft widerspiegelt:

„Es ist viel mehr Wert auf Anschaulichkeit gelegt worden. Das ist natürlich auf einem Tablet-PC oder in einem Arbeitsbuch auch viel einfacher umzusetzen, als ich das sonst im Unterricht machen kann. Wie oft erweitere oder kürze ich schon grafisch, oder wie oft markiere ich Mengen? Das schaffe ich zeitlich nicht wirklich.“

Insbesondere zeigten sich am Gymnasium keine Unterschiede bei arithmetischen Fähigkeiten. Dies erscheint auch gerade deshalb bemerkenswert, weil der Unterricht mit traditionellen Schulbüchern in der Kontrollgruppe gerade auf die Ausbildung arith-

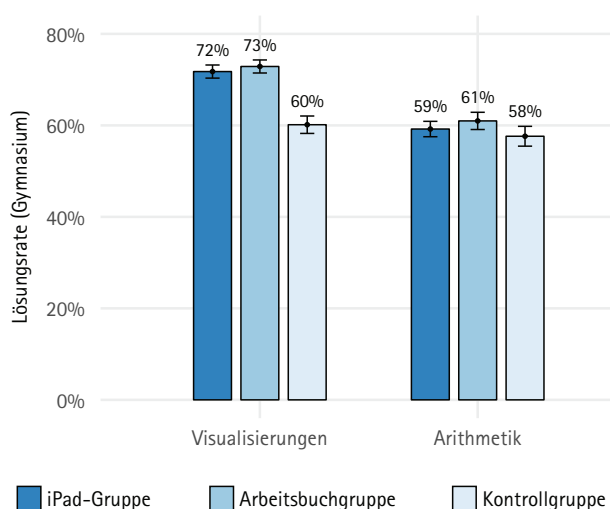


Abbildung 5. Mittelwertvergleich der Interventionsgruppen an Gymnasien für die beiden Skalen „Visualisierungen“ und „Arithmetik“ im Posttest. Fehlerbalken entsprechen 95%-Konfidenzintervallen (vgl. Reinhold, 2018b, Abbildung 7.14).

Aufgabe 19 Uli sagt: „Der Bruch $\frac{5}{8}$ ist kleiner als der Bruch $\frac{5}{10}$, weil 8 kleiner als 10 ist.“

Erkläre Uli, warum das falsch ist.

Abbildung 6. Exemplarische Schülerlösung beim Größenvergleich von Brüchen, die für ein tiefgehendes Verständnis von Bruchzahlen bestehend aus Zähler und Nenner spricht.

Wenn ein Kuchen in 8 Stücke geteilt wird, alle sind gleichgroß, dann ist ein Stück größer als würde der Kuchen in 10 gleichgroße Stücke geteilt werden. Nun nehme ich 5 Teile vom Kuchen der in 8- und fünf von dem der in 10 gleichgroße Stücke geteilt ist. Vom ersten Kuchen habe ich mehr!

Effekte der Intervention an Gymnasien

Unter Berücksichtigung des Vorwissens zeigte sich am Gymnasium ein signifikanter Effekt der Interventionsgruppe auf die Leistung im Posttest. Dabei unterschieden sich zwar beide Experimentalgruppen – die iPad-Gruppe und die Arbeitsbuchgruppe – hinsichtlich ihrer Leistung signifikant von der Kontrollgruppe, jedoch konnten keine Unterschiede zwischen den beiden Experimentalgruppen gefunden werden. Dieses Ergebnis zeigte sich analog für den Prüfungsteil Visualisierungen. Dagegen ließen sich am Gymnasium keine signifikanten Gruppenunterschiede im Prüfungsteil Arithmetik feststellen (Reinhold, 2018b).

metischer Fähigkeiten fokussierte, während im Unterricht in den Experimentalgruppen die Ausbildung tragfähiger Vorstellungen zu Bruchzahlen auf der Basis ikonischer Darstellungen im Fokus stand. Weiter zeigte sich kein Unterschied zwischen den beiden Experimentalgruppen: Offensichtlich konnten die leistungsstärkeren Gymnasiastinnen und Gymnasiasten nicht wie erwartet von einer digitalen Aufbereitung der Inhalte und der interaktiven Darbietung auf iPads zusätzlich profitieren.

Darüber hinaus zeigte sich am Gymnasium, dass Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppen beim Größenvergleich von Bruchzahlen häufiger auf Strategien zurückgriffen, die für ein ausgeprägtes Verständnis rationaler Zahlen sprechen, als Lernende der Kontrollgruppe (Reinhold, Reiss, Hoch, Werner & Richter-Gebert, 2018). So antwortete etwa ein Schüler auf die Frage danach, warum $\frac{5}{8}$ größer sei als $\frac{5}{10}$: „Wenn ein Kuchen in 8 Stücke geteilt wird, alle sind gleichgroß [sic], dann ist ein Stück größer als würde der Kuchen in 10 gleichgroße Stücke geteilt werden ...“ (vgl. Abbildung 6). Damit gelang ihm der Größenvergleich ohne Rückgriff auf syntaktische Regeln, die auch ohne Verständnis für Bruchzahlen angewendet werden können.

Können mit multimedialen und digitalen Lernumgebungen für tendenziell leistungsstärkere und tendenziell leistungsschwächere Schülerinnen und Schü-



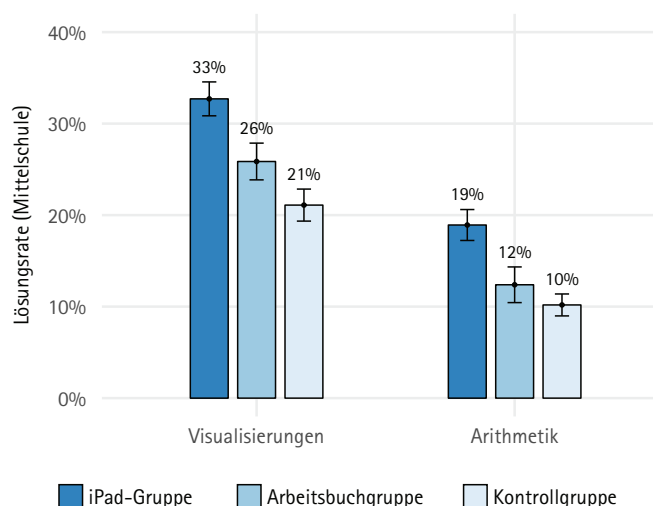


Abbildung 7. Mittelwertvergleich der Interventionsgruppen an Mittelschulen für die beiden Skalen „Visualisierungen“ und „Arithmetik“ im Posttest. Fehlerbalken entsprechen 95%-Konfidenzintervallen (vgl. Reinhold, 2018b, Abbildung 7.18).

ler identische Effekte erzielt werden? Um diese Frage zu beantworten wurden die dargestellten Analysen auch für Mittelschülerinnen und Mittelschüler durchgeführt. Tatsächlich zeigte sich für die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler ein anderes Bild. Hier erzielten Lernende der iPad-Gruppe im Mittel eine Lösungsrate von 26% und damit signifikant bessere Ergebnisse als Schülerinnen und Schüler der Arbeitsbuchgruppe (19%) sowie der Kontrollgruppe (17%). Die erwarteten positiven Effekte durch die fachdidaktische Aufbereitung des Materials traten an der Mittelschule also erst in Verbindung mit einer zusätzlichen digitalen Aufbereitung, adaptiver Aufgabenschwierigkeit, individuellem Feedback und interaktiven Aufgabenformaten auf Tablet-PCs auf, was sich in den Lösungsraten entsprechend widerspiegelte (vgl. Abbildung 7). Auch eine Mittelschullehrkraft bestätigte, dass das iPad die Leistungsbereitschaft der Schülerinnen und Schüler sehr positiv beeinflusst hat:

„Die Schülerinnen und Schüler haben sehr konzentriert gearbeitet. Sie hatten ein hohes Durchhaltevermögen im Vergleich zur üblichen Arbeit mit einem Schulbuch. Da fühlt sich der eine oder andere dann doch schneller abgehängt.“

Insbesondere bewiesen die Schülerinnen und Schüler der iPad-Gruppe an der Mittelschule nicht nur bessere Fähigkeiten im Umgang mit Visualisierungen,

Effekt der Intervention an Mittelschulen

Auch an der Mittelschule war der Einfluss der Interventionsgruppe auf die Leistung im Posttest signifikant. Im Gegensatz zum Gymnasium bestanden in dieser tendenziell leistungsschwächeren Schülergruppe signifikante Unterschiede zwischen den beiden Experimentalgruppen sowie der iPad-Gruppe und der Kontrollgruppe zugunsten der iPad-Gruppe. Zudem ergaben sich keine statistisch relevanten Unterschiede zwischen der Arbeitsbuch- und der Kontrollgruppe. Insbesondere zeigten sich diese Unterschiede an der Mittelschule sowohl im Prüfungsteil Visualisierungen als auch im Prüfungsteil Arithmetik (Reinhold, 2018b).

sondern darüber hinaus auch bessere arithmetische Fähigkeiten (vgl. Abbildung 7). Auch hier wirkte sich eine Fokussierung auf die Vermittlung tragfähiger Vorstellungen von Bruchzahlen mittels unterschiedlicher ikonischer Darstellungen nicht nachteilig auf die Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten aus, sondern hatte im Gegenteil sogar einen positiven Einfluss. Dies spricht dafür, dass gerade leistungsschwächere Lernende vom Einsatz von Tablet-PCs profitieren können. Diese Einschätzung wird auch von den Lehrkräften geteilt, die mit den iPads unterrichtet haben:

„Gerade auch die eher leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler fanden das Projekt großartig. Sie waren wirklich sehr begeistert.“

Unterrichten mit dem Tablet-PC: Brüche als Teil mehrerer Ganzer, oder „Pizza und Schokolade verteilen“

Fach: Mathematik in der 6. Jahrgangsstufe

Medieneinsatz: Tablet-PC

Software: iBook „Bruchrechnen: Bruchteile & Bruchteile greifen & begreifen“ → <http://go.tum.de/623496>

Vorwissen: Brüche als Teil eines Ganzen

Lernziele: Die Schülerinnen und Schüler können altersgerecht begründen, dass die beiden Interpretationen von Bruchzahlen als „Teil eines Ganzen“ und „Teil mehrerer Ganzer“ gleichwertig sind. Sie können Anteile in geeigneten Aufgabe nach dem Schema „mal Zähler, geteilt durch Nenner“ berechnen.

Möglicher Aufbau einer Schulstunde:

Zur Vermittlung der Grundvorstellung „Teil mehrerer Ganzer“ bieten sich konkrete Verteilungssituationen an. Die Problemstellung, drei Pizzen gerecht an vier verschiedene Personen zu verteilen, ermöglicht dabei vielfältige unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten, je nachdem ob jede der drei Pizzen einzeln oder etwa alle drei Pizzen gleichzeitig auf den Tisch kommen (Winter, 1999). Diese explorative Aufgabe kann im iBook konkret bearbeitet werden (Widget 23). Hierbei bietet der Touchscreen die Möglichkeit, auf natürliche Gesten beim Zerschneiden und Verteilen der Pizzen zurückzugreifen (vgl. Abbildung 8).

Schülerlösungen können mittels Beamer an die Wand projiziert und im Plenum besprochen werden. Am Ende kann die zentrale Aussage im Unterrichtsgespräch entwickelt werden: Egal wie die Pizzen geteilt wurden, jeder der Gäste hat $\frac{1}{4}$ von 3 Pizzen erhalten – und das entspricht $\frac{3}{4}$ von einer Pizza. Einen ähnlichen Zugang bildet die Problemstellung, drei Schokoriegel gerecht an vier Kinder zu verteilen (Padberg & Wartha, 2017). Hier wird nicht auf die Darstellung im Kreisdiagramm, sondern auf die Darstellung im Balkendiagramm zurückgegriffen (vgl. Abbildung 9).

Mittels eines Multiple-Choice-Tests (Widget 25) kann den Schülerinnen und Schüler nochmals der Bezug zu unterschiedlichen „Ganzen“ verdeutlicht werden. Dabei stehen korrekte Aussage („Karl bekommt $\frac{1}{4}$ von der gesamten Schokolade.“) falschen Aussagen („Tim bekommt $\frac{1}{4}$ von einem Schokoriegel.“) gegenüber.

Im Unterrichtsgespräch kann unter Rückgriff auf das iBook oder die Verwendung des Schulhefts und der Tafel der Übergang von ikonischen Darstellungen zu symbolischen Darstellungen angeleitet werden. Hierbei bietet sich etwa der Rückgriff auf Strecken an: „ $\frac{3}{4}$ Meter ist auch $\frac{1}{4}$ von drei Metern.“ Gemeinsam kann daran das Schema „mal Zähler, geteilt durch Nenner“ entwickelt werden – und hier können die Verteilungssituationen genutzt werden, um dieser syntaktischen Regel eine Bedeutung zu verleihen: Zuerst wird das Ganze vervielfacht (mehrere Pizzen, Schokoriegel, Meter, etc.) und erst danach in gleich große Stücke geteilt. Die Reihenfolge der Rechenschritte dreht sich im Vergleich zur Grundvorstellung „Teil eines Ganzen“ um.

Zur Übung kann unter anderem auf passende Rechenaufgaben zurückgegriffen werden (z. B. Widget 27), deren Schwierigkeitsgrad adaptiv an das individuelle Leistungsniveau angepasst wird und die Lernenden Feedback erhalten (vgl. Abbildung 10).

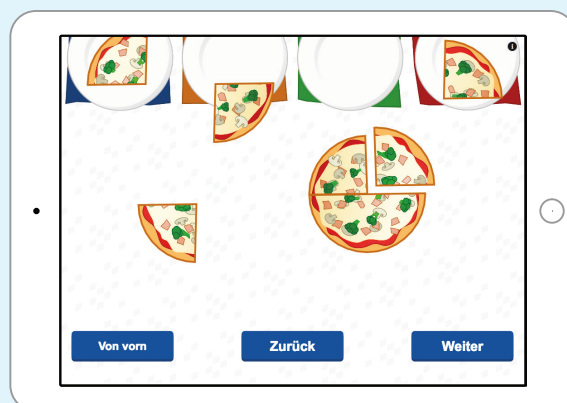


Abbildung 8. Zwei Pizzen gerecht an vier Personen verteilen, Widget 23 im iBook.

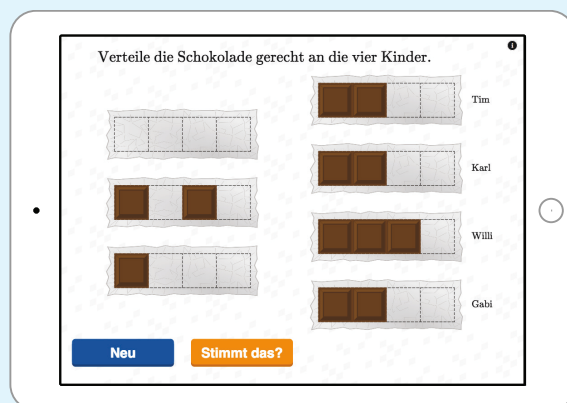


Abbildung 9. Drei Schokoriegel gerecht an vier Kinder verteilen, Widget 24 im iBook.

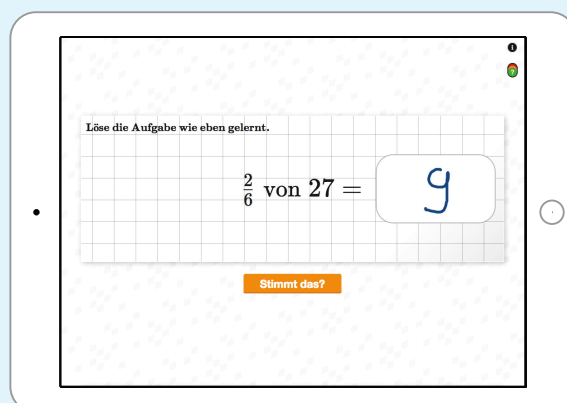


Abbildung 10. Berechnen des Bruchteils bei gegebenem Anteil und Ganzen, Widget 27 im iBook. Erst das Produkt aus dem Ganzen 27 und dem Zähler 2 ist ein Vielfaches des Nenners 6. Erweitern und Kürzen ist den Schülerinnen und Schülern zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt.

3.4 Arbeiten mit Tablet-PCs während des Mathematikunterrichts

Die im Forschungsprojekt erhobenen Prozessdaten geben Einblicke, wie Schülerinnen und Schüler mit dem iBook und auf Tablet-PCs gearbeitet haben. Insgesamt liegen rund 235 000 aufgezeichnete Aktivitäten von Lernenden beider Schularten vor. Dies entspricht einem Durchschnitt von etwa 900 Aktivitäten pro Schülerin oder Schüler innerhalb des Interventionszeitraums. Von diesen entfallen knapp 190 000 auf bearbeitete Aufgaben. Damit lösten die Schülerinnen und Schüler der iPad-Gruppe im Durchschnitt etwa 50 Aufgaben in jeder der 15 Mathematikstunden mit den Tablet-PCs. Dies erscheint gegenüber traditionellem Unterricht eine deutliche Steigerung in der Anzahl der Übungsaufgaben, die während einer Unterrichtsstunde von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden können, wie auch eine Lehrkraft der iPad-Gruppe bestätigte:

„Auch sehr schön war, dass die Kinder einfach wesentlich mehr Aufgaben bearbeitet haben, als man sonst im Unterricht schafft.“

Bestehen Unterschiede bei der Nutzung des Tablet-PCs während des Mathematikunterrichts zwischen Mädchen und Jungen? Wertet man die Prozessdaten der Gymnasialstichprobe mit Blick auf die Nutzung der interaktiven Ausgaben aus, so zeigt sich zwischen den beiden angegebenen Geschlech-



tern kein Unterschied bezüglich der Häufigkeit der Nutzung. Mädchen wie Jungen bearbeiteten im Schnitt gleich viele interaktive Aufgaben während des Schulunterrichts. Bei genauerer Analyse offenbart sich, dass Mädchen im Mittel länger insgesamt an den Aufgaben arbeiteten als Jungen, was als eine intensivere Auseinandersetzung mit dem entsprechenden Lerngegenstand gedeutet werden kann. An der Mittelschule konnte kein Geschlechtsunterschied bezüglich des Nutzungsverhaltens identifiziert werden und insbesondere die intensivere Auseinandersetzung der Mädchen mit den Aufgaben im iBook nicht repliziert werden.

Wie nutzen Schülerinnen und Schüler die angebotenen Features der entwickelten digitalen Lernumgebung? Die Untersuchung der Nutzung von abgestuften Lösungshilfen bei Gymnasiastinnen und Gymnasiasten zeigt, dass nur in 16% aller Aufgabenbearbeitung eine Lösungshilfe zu Rate gezogen wurden. Ein Grund dafür könnte sein, dass die Aufgaben im Allgemeinen für die leistungsstärkere Stichprobe am Gymnasium gut zu bewältigen waren. Allerdings zeigt sich auch, dass sich der Abruf einer Lösungshilfe in den meisten Fällen positiv auf die Lösungsraten der im Anschluss bearbeiteten Aufgaben auswirkte. Dies erscheint passend zu bisherigen wissenschaftlichen Untersuchungen und hebt die Nützlichkeit dieses im iBook angebotenen

Geschlechtsunterschiede im Nutzungsverhalten am Gymnasium

Im Mittel bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler der Gymnasialstichprobe 653 Aufgaben im interaktiven Schulbuch. Eine Untersuchung zeigte, dass die Mittelwerte für Mädchen und Jungen keine signifikanten Unterschiede aufzeigten. Jedoch ergab sich ein signifikanter Unterschied in der Zeit, die in den interaktiven Aufgaben verbracht wurde: Mädchen verbrachten im Mittel länger in den Aufgaben als Jungen (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, in Druck-a).

Features hervor. Insbesondere können die aufzeichneten Prozessdaten Aufschluss über Wirkmechanismen von Features in digitalen Lernumgebungen geben.

Prozessdaten eröffnen darüber hinaus auch aus psychologischer Sicht interessante neue Forschungsansätze. Eine Frage, die in dieser Richtung untersucht wird, ist der Effekt, den die Bearbeitungszeit



Der direkte Effekt von Bearbeitungszeit auf Aufgabenlösung

Es wurde der Effekt der Bearbeitungszeit auf die Korrektheit der Schülerantwort untersucht. Die Modellschätzung ergab einen signifikanten negativen Effekt der Zeit auf die Korrektheit der abgegebenen Antwort: Im Mittel führten schnellere Antworten eher zu richtigen Lösungen. Der Effekt variierte zwischen den Aufgabentypen und zwischen Schülerinnen und Schülern. Die Variation des Effekts war abhängig von der individuellen Kompetenz und der Aufgabenschwierigkeit: Der negative Effekt war für Schülerinnen und Schüler mit höherer Kompetenz sowie in einfacheren Aufgaben stärker und für Schülerinnen und Schüler mit niedrigerer Kompetenz sowie in schwierigeren Aufgaben schwächer ausgeprägt (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, eingereicht).

einer Aufgabe auf den Lösungserfolg hat. Die Prozessdaten aus *ALICE:Bruchrechnen* geben Einsichten, wie die Antwort auf diese Frage beim Erwerb des Bruchzahlbegriffs aussieht. In den Aufgaben im interaktiven Schulbuch zeigte sich ein negativer Effekt: Richtige Antworten waren mit kürzeren Antwortzeiten assoziiert und umgekehrt. Dabei zeigte sich auch, dass im Mittel bei leichten Aufgaben eine schnelle Schülerlösung häufiger zu einer richtigen Antwort führte, als bei einer schweren Aufgabe. Diese Beobachtung erscheint passend zu bisherigen Forschungsergebnissen bezüglich dieses Effekts, wobei bisher zumeist erwachsene Männer und Frauen in Testsituationen untersucht wurden. Eine mögliche Erklärung ist, dass vor falschen Antworten oftmals eine längere Zeit in Ungewissheit überlegt wird und letztendlich die eingegebene Lösung geraten wird.

Prozessdaten erlauben darüber hinaus deutlich detailliertere Einblicke in individuelle Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler. So können in Aufgaben zur Visualisierung von Brüchen die Fingerbewegungen der Lernenden auf dem Touchscreen aufgezeichnet werden, was das Wiederabspielen aller Interaktionen mit der digitalen Lernumgebung erlaubt und so den gesamten Lösungsprozess vollständig konserviert. Diese Technik kam bei „kontinuierlichen“ Aufgaben zur ikonischen Darstellung von Bruchzahlen zum Einsatz. Hier mussten Schülerinnen und Schülern den gefragten Bruch bei vorgegebenem Ganzen markieren, das nicht unterteilt war. Analysiert man diese aufgezeichneten Fingerbewegungen, so lässt sich als ein Ergebnis festhalten, dass sich über alle aufgezeichneten Fingerbewegungen verschiedener Schülerinnen und Schüler hinweg *Muster* erkennen ließen. *Welche* Muster dabei in den Aufgaben auftreten, ist abhängig davon, welche Form das Ganze hat, in dem der Bruchteil markiert werden soll. Besonders deutlich zeigten sich Muster, die klar erkennbare Pausen bei der Hälfte des Ganzen (was für einen Vergleich des anzugebenden Bruches mit $\frac{1}{2}$ und damit für ein eher intuitives Verständnis der Größenordnung des Bruches spricht), oder einen Unterteil-

lungsprozess in gleich große Stücke aufweisen (was eher für den Rückgriff auf Zählschemata spricht). Die Interpretationen erscheinen auch deshalb plausibel, da bei Verwendung eines Tablet-PCs mit Touchscreen-Technologie Schülerinnen und Schüler auf natürliche Gesten zurückgreifen können. Dieser enaktive Zugang zur Bruchrechnung wurde auch von einer Lehrkraft als positiv angemerkt:

„Dass die Kinder einfach mit ihrer Hand die Bruchteile herumschieben können und z. B. Pizza teilen können, ist sehr gut. Ich denke, das ist auf jeden Fall hilfreich. Die Kinder gehen auch im Alltag mit diesem Medium um.“

Muster in den Visualisierungsaufgaben

Die Fingerbewegungen der Schülerinnen und Schüler wurden nach Mustern klassifiziert. Anschließend wurden alle 2901 Aufgabenlösungen der Gymnasialstichprobe einzelnen Musterkategorien zugeordnet. Es wurde untersucht, ob diese Muster von der geometrischen Form des Ganzen (z. B. Kreis- oder Balkendiagramm) abhängen. Die Modellschätzung ergab eine signifikante Interaktion zwischen der Form des Ganzen und den auftretenden Mustern: Schülerinnen und Schüler griffen beim Kreisdiagramm auf andere Strategien zurück, um Bruchteile zu markieren, als beim Balkendiagramm (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, in Druck-b).

4 Diskussion und Ausblick

In der vorliegenden Broschüre wurde ein theoretischer Rahmen dargestellt, der für die Entwicklung und Evaluation von digitalen Lernumgebungen etwa für Tablet-PCs geeignet erscheint. Insbesondere wurde eine Synthese fachdidaktischer Erkenntnisse und psychologischer Theorien angestrebt. Die im Forschungsprojekt *ALICE:Bruchrechnen* entwickelte digitale Lernumgebung in Form eines iBooks zur Verwendung auf iPads für den Anfangsunterricht der Bruchrechnung stellt ein Beispiel für eine derartige Synthese dar. Die Ergebnisse der durchgeführten empirischen Untersuchung geben Aufschluss über die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs in Klasse 6 sowie den Nutzen von Tablet-PCs im Mathematikunterricht und Eröffnen weiterführende Fragen für die mathematikdidaktische Forschung.

Sowohl für leistungsstärkere als auch für tendenziell leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler erwies sich das aufbereitete Material als gewinnbringend zur Unterstützung des Erwerbs von Fähigkeiten im Umgang mit Visualisierungen von

Brüchen, ohne dass arithmetische Fähigkeiten beeinträchtigt wurden. Dies kann als Indiz dafür gedeutet werden, dass zu Beginn der sechsten Klasse die Unterrichtszeit, die für das Einüben von Rechenaufgaben wie etwa „ $\frac{2}{3}$ von 27“ verwendet wird, zu Gunsten einer tiefgehenden Auseinandersetzung mit ikonischen Darstellungen von Bruchzahlen durchaus reduziert werden kann, ohne dass arithmetische Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler dadurch grundsätzlich beeinträchtigt würden. Dies erscheint auch vor dem Hintergrund der in dieser Broschüre dargestellten psychologischen Theorien plausibel. Ebenso kann aus einer fachdidaktischen Perspektive angenommen werden, dass das Wissen um unterschiedliche Darstellungen von Bruchzahlen sowie die Fähigkeit, zwischen diesen Darstellungen flexibel zu wechseln, eher zur Entwicklung tragfähiger Konzepte von Bruchzahlen beiträgt, als das Wissen um syntaktische Rechenregeln alleine. Dies spricht insgesamt für einen vermehrten Rückgriff auf bildhafte Darstellungen von Brüchen zu Beginn der Jahrgangsstufe 6.



Die vorliegende Broschüre fasst den Beitrag von *ALICE:Bruchrechnen* zur Digitalisierung des Mathematikunterrichts zusammen. Es zeigten sich unterschiedliche Wirkmechanismen von Tablet-PCs für tendenziell leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sowie eher leistungsstarke Lernende im Mathematikunterricht der Klasse 6: Eine digitale Aufbereitung der Inhalte sowie ihre Präsentation auf iPads erwies sich für Schülerinnen und Schüler im Vergleich zu traditionellen Schulbüchern als durchaus gewinnbringend. Jedoch konnten vergleichbare Leistungen am Gymnasium bereits mit geeignet aufbereitetem papierbasiertem Material erreicht werden. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler konnten also von Tablet-PCs nicht zusätzlich profitieren. Möglicherweise konnten sie die im iBook interaktiv dargebotenen Manipulationen ikonisch dargestellter Bruchzahlen mental vollführen und waren daher nicht auf konkrete *Hands-On*-Aktivitäten angewiesen. Eventuell war für diese leistungsstärkere Zielgruppe auch ein adaptiver Anstieg der Aufgabenschwierigkeit sowie Feedback nicht notwendig, um den individuellen Lernprozess geeignet zu begleiten, da der Lernstoff insgesamt gut verstanden werden konnte. Jedoch zeigten sich positive Effekte des aufbereiteten Unterrichtsmaterials bei leistungsschwächeren Mittelschülerinnen und Mittelschülern erst in Verbindung mit einer digitalen Lernumgebung auf Tablet-PCs.

Gerade für eine tendenziell leistungsschwächere Zielgruppe erscheinen daher Lernumgebungen mit adaptiver Aufgabenschwierigkeit, individuellem Feedback und interaktiven Aufgabenformaten mit Steuerung durch passenden Gesten gewinnbringend. Hier sehen auch die unterrichtenden Lehrkräfte Vorteile in der Verwendung digitaler Medien, was eine befragte Lehrerin folgendermaßen beschreibt:

„Am besten hat mir das Kapitel zum Zahlenstrahl gefallen. Das ist normalerweise sehr schwer zu erklären und die Schülerinnen und Schüler tun sich damit unheimlich schwer. Aber ein Rechteck, das interaktiv in sich zusammenfällt und in den Zahlenstrahl übergeht, das ist für den Einstieg sehr gut geeignet.“

Es ist wahrscheinlich, dass die Möglichkeit, vorgegebenen ikonische Darstellungen von Bruchzahlen interaktiv und mittels natürlicher Gesten verändern zu können, einen entscheidenden Beitrag zum Erwerb komplexer mathematischer Inhalte bei leistungsschwächeren Lernenden darstellen kann. Auch der Eindruck der unterrichtenden Lehrkräfte spiegelt diese Einschätzung wider:

„Sie haben sich einfach auf jede Mathematikstunde gefreut – vor allem auch eher leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler, die sonst ziemlich leicht überfordert sind. Auch diejenigen, die den Mathematikunterricht im Normalfall nicht mögen, waren mit Feuereifer dabei und haben zu Hause ganz begeistert berichtet.“

Die Analyse von Prozessdaten ist ein relativ neuer Forschungsansatz. Mit dem vermehrten Aufkommen von computerbasiertem Testen erlaubt die Aufzeichnung von Daten, während die Schülerinnen und Schüler Testaufgaben bearbeiten, nicht nur zu untersuchen, ob sie die Aufgaben lösen können, sondern auch wie sie die Aufgaben bearbeiten. So können etwa neue Einblicke in konkrete Lösungsprozesse von Lernenden gewonnen werden. Als einen weiteren Schritt bietet sich durch die zunehmende Digitalisierung der Schulen die Möglichkeit,

Prozessdaten in digitalen Schulbüchern zu erfassen, was auch vielfältige Einsatzmöglichkeiten zur Unterstützung von Lehrerinnen und Lehrern bieten kann. Dank dieser Daten kann überprüft werden, wie Schülerinnen und Schüler mit einem digitalen Schulbuch arbeiten und wie sie während des Erlernens neuer Inhalte einzelne Aufgaben lösen. So können wertvolle Hinweise über den Lernprozess gewonnen werden, ohne dass das für die Schülerinnen und Schüler das Gefühl einer Testsituation aufkommt. Die Ergebnisse aus dem Projekt *ALICE:Bruchrechnen*

deuten eine Vielzahl von Einsatzmöglichkeiten an, die der Rückgriff auf Prozessdaten zum einen für die (mathematikdidaktische) Forschung und zum anderen für die Schulpraxis bietet: Sind in den Klassenzimmern die nötigen technischen Voraussetzungen erfüllt, sind etwa Live-Übertragungen der Daten an die Lehrkraft denkbar, so dass diese sehen könnte, auf welcher Schwierigkeitsstufe sich die einzelnen Schülerinnen und Schüler bewegen und welche Schülerinnen und Schüler bei welchen Aufgaben konkrete Probleme haben.

5 Fazit

Insgesamt lassen die aufgezeigten Erkenntnisse den Schluss zu, dass der Einsatz digitaler Medien – insbesondere Tablet-PCs – im Mathematikunterricht sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für Lehrkräfte eine gewinnbringende Ergänzung zu traditionellen Schulbüchern und papierbasierten Lernumgebungen darstellt. Auch die befragten Lehrkräfte zeigen sich nach dem Unterrichten mit Tablet-PCs sehr zuversichtlich für die Zukunft:

„Zusammenfassend würde ich jetzt sagen: Es wäre schön, wenn ich immer iPads im Unterricht zur Verfügung stehen hätte.“



6 Literatur

- Freeman, J. B., Dale, R., & Farmer, T. A. (2011). Hand in Motion Reveals Mind in Motion. *Frontiers in Psychology*, 2(59). doi:10.3389/fpsyg.2011.00059
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. doi:10.3102/003465430298487
- Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L. & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe: Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit*. Münster: Waxmann.
- Irwin, T. (1988). *Aristotle's First Principles*. Oxford: The Clarendon Press.
- Kultusministerkonferenz (Hrsg.). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Luchterhand.
- Leutner, D. (2002). Adaptivität und Adaptierbarkeit multimedialer Lehr- und Informationssysteme. In L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet: Lehrbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., S. 115–126). Weinheim: Beltz.
- Mayer, R. E. (2014). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2. Aufl., S. 31–48). New York: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139547369.005
- Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, 107(3), 537–555. doi:10.1111/bjop.12161
- Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben: Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48(11), 8–12.
- Sälzer, C. & Reiss, K. (2016). PISA 2015 – die aktuelle Studie. In K. Reiss, C. Sälzer, A. Schiepe-Tiska, E. Klieme & O. Köller (Hrsg.), *PISA 2015: Eine Studie zwischen Kontinuität und Innovation* (S. 13–44). Münster: Waxmann.
- Schnotz, W. & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, 13(2), 141–156. doi:10.1016/s0959-4752(02)00017-8
- Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-8126-4
- Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin and Review*, 9(4), 625–636. doi:10.3758/bf03196322
- Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Aachen: Zugriff unter <http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf>

Veröffentlichungen im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen

- Hoch, S. (in Vorb.). *Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern* (Dissertation, Arbeitstitel). Technische Universität München, München.
- Hoch, S., Reinhold, F. & Reiss, K. (2016). Repräsentationen von Bruchzahlen verstehen: Lernen mit dem Tablet in Jahrgangsstufe 6. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Bd. 1, S. 429–432). Münster: WTM-Verlag. doi:10.17877/DE290R-17560
- Hoch, S., Reinhold, F. & Werner, B. (2017). *Tablets im Schulunterricht. Die Entwicklung eines interaktiven Bruchrechnungsbuchs*. Vortrag auf der L3 „Lehrer Lernen von Lehrern“ der Technischen Universität München, Garching.
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2018a). *Bruchrechnen. Bruchzahlen & Bruchteile greifen & begreifen [Apple iBooks Version]* (4. Aufl.). München: Technische Universität München.
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2018b). *Bruchrechnen. Bruchzahlen & Bruchteile greifen & begreifen* (3. Aufl.). München: Technische Universität München. doi:10.14459/2018md1436808
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2017a). *Interactive Textbooks: The Case of Fractions*. II International Conference on Mathematics Textbooks Research and Development (ICMT2 2017), Rio de Janeiro, Brasilien.
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2017b). Prozessdatenanalysen: Darstellung von Brüchen. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 424–428). Münster: WTM-Verlag. doi:10.17877/DE290R-18527
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (eingereicht). Design and research potential of interactive textbooks: the case of fractions. *ZDM Mathematics Education*.

- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (in Druck-a). Geschlechtsunterschiede beim Umgang mit dem interaktiven Schulbuch ALICE:Bruchrechnen – eine Analyse von Prozessdaten. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM-Verlag.
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (in Druck-b). How do students visualize fractions? A finger tracking study. In *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Umeå, Schweden: PME.
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018). *Interaktive Lehrbücher im Bruchrechnenunterricht der Sekundarstufe I*. Vortrag auf der 6. Tagung der Gesellschaft für Empirische Bildungsforschung (GEBF), Basel.
- Reinhold, F. (2017a). *ALICE:Bruchrechnen: Tablet PCs im Unterricht der Sekundarstufe*. Vortrag im Berlin-Brandenburgischen Seminar „Mathematik und ihre Didaktik“, Berlin.
- Reinhold, F. (2017b). *Tablet-PCs im Anfangsunterricht der Bruchrechnung: Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Vortrag im mathematikdidaktischen Kolloquium „Dialoge zum Mathematikunterricht“, Freiburg.
- Reinhold, F. (2018a). *Einsatz digitaler Unterrichtsmedien im Fach Mathematik: Fachdidaktische und Psychologische Perspektiven*. Vortrag an der Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung, Dillingen.
- Reinhold, F. (2018b). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6* (Dissertation). Technische Universität München, München.
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (in Druck). Konzeptuelles Verständnis von Brüchen mit Visualisierungen auf iPads fördern: Eine empirische Studie. In Institut für Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM-Verlag.
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2017a). iPads in Grade 6 Classrooms: Effects on Students' Choice of Strategy for Comparing Fractions. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Hrsg.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 74). Singapur: PME.
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2017b). Manipulating Fractions: Effects of iPad-assisted Instruction in Grade 6 Classrooms. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Hrsg.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 97–104). Singapur: PME.
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018). *Tablet-PCs im Mathematikunterricht der sechsten Jahrgangsstufe: Das interaktive Schulbuch ALICE: Bruchrechnen*. Vortrag auf dem 109. Bundeskongress des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU), München-Garching.
- Reinhold, F., Hofer, S., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018). *Schulartsspezifische Unterschiede des Einsatzes von iPads im Mathematikunterricht der sechsten Jahrgangsstufe. Ergebnisse einer empirischen Studie und weiterführende Fragestellungen*. Vortrag auf der wissenschaftlichen Jahrestagung von LERN 2018 „Digitalisierung und Bildung: Potenziale und Herausforderungen aus der Perspektive der Bildungsforschung“, Tübingen.
- Reinhold, F., Reiss, K., Hoch, S., Werner, B. & Richter-Gebert, J. (2018). *Comparing Fractions: The Enactive Way. Supporting Students' Choice of Appropriate Strategies with iPad-Assisted Instruction*. Paper presented at the 2018 annual meeting of the American Educational Research Association, New York.
- Reinhold, F., Reiss, K., Obersteiner, A., Hoch, S., Werner, B. & Richter-Gebert, J. (2018). *Drawing on Children's Intuitive Knowledge to Enhance Fraction Concepts: An Intervention Study with Tablet-PCs*. Paper presented at the fifth meeting of the Research Community WO.008.14N, Leuven, Belgien.
- Reiss, K. (2018). *ALICE:Bruchrechnen: Arbeiten mit dem Tablet-PC im Unterricht der Sekundarstufe*. Vortrag im mathematischen Kolloquium der Universität Osnabrück.
- Reiss, K., Hoch, S., Reinhold, F., Richter-Gebert, J. & Werner, B. (2017). *Tabletklassen: Die Zukunft des Unterrichts?* In Heinz Nixdorf MuseumsForum (Hrsg.), *Bildung im digitalen Zeitalter – Bilanz und Perspektiven* (S. 92 – 107). Paderborn: Heinz Nixdorf MuseumsForum.
- Reiss, K., Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B. & Richter-Gebert, J. (2017). *Analyzing Classroom Work: Students' Use of Electronic Textbooks*. II International Conference on Mathematics Textbooks Research and Development (ICMT2 2017), Rio de Janeiro, Brasilien.
- Reiss, K. & Reinhold, F. (2017). *Bruchrechnen auf dem iPad: Interaktives Lernen mit adaptiver Unterstützung*. Vortrag auf der Jahrestagung des Verbandes zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU), Augsburg.
- Werner, B. (in Vorb.). *Mathematical Foundations of Geometry-based Handwriting Recognition* (Dissertation, Arbeitstitel). Technische Universität München, München.

7 Danksagung

Für die erfolgreiche Durchführung einer Studie in dieser Größe sind zahlreiche Akteure notwendig, die gemeinsam zum Gelingen des Forschungsprojektes beitragen. Wir möchten uns an dieser Stelle abschließend ganz herzlich bei allen Lehrkräften sowie ihren Schülerinnen und Schülern bedanken, die an den Erhebungen und den Unterrichtssequenzen beteiligt waren und ohne deren Mitwirkung unsere Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Darüber hinaus möchten wir uns beim Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst sowie dem Staatlichen Schulamt München für die freundliche Zusammenarbeit, die Unterstützung und das entgegengebrachte Vertrauen bedanken. Sie haben uns bereitwillig die Türen in die Schulen geöffnet und damit praxisnahe empirische Bildungsforschung ermöglicht, die wir als einen gewinnbringenden Beitrag zur mathematikdidaktischen Forschung und damit zur Verbesserung des Mathematikunterrichts ansehen. Unser Dank gilt auch

den zahlreichen Helferinnen und Helfern sowie den studentischen Hilfskräften, die an der Durchführung und Auswertung der Studie beteiligt waren. Schließlich möchten wir uns bei der Heinz Nixdorf Stiftung bedanken, die das Forschungsprojekt *ALICE:Bruchrechnen* finanziell unterstützt hat.

Das Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen wurde unter dem Namen „Lernen mit dem Tablet-PC: Eine Einführung in das Bruchrechnen für Klasse 6“ zwischen 2015 und 2018 von der Heinz Nixdorf Stiftung gefördert. Die Durchführung der Interventionen wurde vom Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst für Gymnasien im Schuljahr 2016/2017 unter dem Geschäftszeichen X.7-B05106/141/8 bzw. dem Staatlichen Schulamt München für Mittelschulen im Schuljahr 2017/2018 unter dem Geschäftszeichen SchRIII/Erh106/1 genehmigt.

Bildnachweise:

Titelfoto, Seite 3, Seite 22: © Syda Productions / shutterstock.com; Umschlagrückseite und Seite 6 (u.): © Monkey Business Images / shutterstock.com; Seite 4: © wittayayut / fotolia.com; Seite 7: © Yuganov Konstantin / shutterstock.com; Seite 9: © Steve Debenport / istockphoto.com; Seite 10: © Pressmaster / shutterstock.com; Seite 11: © Lorena Fernandez / shutterstock.com; Seite 15: © Rawpixel.com / fotolia.com; Seite 16 (o.): © karelnoppe / shutterstock.com; Seite 18, Seite 24: stockfour / shutterstock.com; Seite 21: © MNStudio / shutterstock.com; Seite 25: © WavebreakMediaMicro / fotolia.com